

確認問題-09

$7-\sqrt{5}$ の整数部分を x 、小数部分を y とするとき、 $\frac{x+y}{x-y}$ の値を求めよ。

(浜田医療センター附属看護学校)

解答

$2 < \sqrt{5} < 3$ より

$$-3 < -\sqrt{5} < -2$$

$$7-3 < 7-\sqrt{5} < 7-2$$

$$4 < 7-\sqrt{5} < 5$$

$7-\sqrt{5}$ の整数部分 x は

$$x=4$$

小数部分 y は

$$\begin{aligned} y &= (7-\sqrt{5})-4 \\ &= 3-\sqrt{5} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{x-y} &= \frac{4+(3-\sqrt{5})}{4-(3-\sqrt{5})} \\ &= \frac{7-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \\ &= \frac{12-8\sqrt{5}}{-4} \\ &= 2\sqrt{5}-3 \quad \dots\dots \text{答} \end{aligned}$$

◀ $\sqrt{5} \doteq 2.236$ を用いると

$7-\sqrt{5} \doteq 4.764$ となり

$$x=4$$

◀ $y=(7-\sqrt{5})-x$

◀ 分母の有理化

9 練習問題

(1) $\sqrt{3}$ の小数部分を x とするとき、 x^2+2x-2 の値を求めよ。

(新潟医療技術専門学校)

(2) $\sqrt{5}+1$ の整数部分を A 、小数部分を B とする。 $AB(B+4)$ の値を求めよ。

(美萩野臨床医学専門学校)

確認問題-10

次の平方根を含んだ式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$

(日本工学院専門学校(理学療法))

解答

(1) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\cdot 2\sqrt{3}}$

$$= \sqrt{7-2\sqrt{12}}$$

$$= \sqrt{4+3-2\sqrt{4\cdot 3}}$$

$$= \sqrt{4}-\sqrt{3}$$

$$= 2-\sqrt{3} \quad \dots\dots \text{答}$$

◀ $\sqrt{\quad}$ の前を「2」にした。

◀ $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ は正の数なので
 $\sqrt{3}-\sqrt{4}$ とすると誤り。

(2) $\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{15}}{2}}$

$$= \frac{\sqrt{5+3-2\sqrt{5\cdot 3}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2} \quad \dots\dots \text{答}$$

◀ $\sqrt{15}$ の部分を $2\sqrt{15}$ の形に
しないと公式が使えない。

◀ 分母の有理化

10 練習問題

次の平方根を含んだ式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

(石川医療技術専門学校)

(2) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$

(愛生会看護専門学校)

(3) $\sqrt{11+3\sqrt{8}}$

(静岡県立東部看護専門学校)

確認問題-11

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}, y = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \text{ のとき } x^2 - 3xy + y^2 \text{ の値を求めよ。}$$

(新潟病院附属看護学校)

解答

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{(3+\sqrt{5})^2 + (3-\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} \\ &= \frac{3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{3^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{28}{4} \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + y^2 &= x^2 + y^2 - 3xy \\ &= (x+y)^2 - 2xy - 3xy \\ &= (x+y)^2 - 5xy \\ &= 7^2 - 5 \cdot 1 \\ &= 44 \quad \dots \dots \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft x &= \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{14+6\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ y &= \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \text{ となる。} \end{aligned}$$

◀ y は x の逆数になっている。

$$\blacktriangleleft x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

11 練習問題

(1) $x = \sqrt{3} + 1, y = \sqrt{3} - 1$ のとき $x^2 + xy + y^2$ の値を求めよ。

(館林高等看護学院)

(2) $x = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき $x^2 + y^2$ の値を求めよ。

(結城看護専門学校)

確認問題-12

$a^2 + b^2 = 1$, $a + b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるとき, ab の値, $a^3 + b^3$ の値, $a^4 + b^4$ の値を求めよ。
(名張市立看護専門学校)

解答

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \text{ より}$$

$$1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2ab$$

$$2ab = \frac{1}{2} - 1$$

$$ab = -\frac{1}{4} \text{ ……答}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{8} \text{ ……答}$$

$$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$$

$$= 1^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{8} \text{ ……答}$$

◀ $a^2 + b^2$, $a + b$ と ab の関係に注目する。

◀ $a + b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を代入してもよい。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$\leftarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$\text{て } \begin{cases} x = a^2 \\ y = b^2 \end{cases} \text{ の形。}$$

$$\leftarrow a^2b^2 = (ab)^2$$

12 練習問題

(1) $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, $y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ のとき, $x + y$, xy , $x^3 + y^3$ の値を求めよ。

(アール医療福祉専門学校)

(2) 2つの数 a と β の間に $a + \beta = 3$, $a^2 + \beta^2 = 5$ という関係があるとき $a^3 + \beta^3$, $a^4 + \beta^4$ の値を求めよ。

(吉備国際大学保健科学部)